

数の表現と誤差

数値計算における単位と次元

誤差

量 x の測定値(計算値) a の誤差が Δa ($\Delta a > 0$)

$$x = a \pm \Delta a \quad a - \Delta a \leq x \leq a + \Delta a$$

$$y = b \pm \Delta b$$

$$z = f(x, y) = c \pm \Delta c$$

$$c = f(a, b)$$

$$\Delta c = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right| \Delta a + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right| \Delta b$$

計算誤差の評価

$$z = x \pm y \quad \Rightarrow \quad \Delta c = \Delta a + \Delta b$$

和差の誤差は絶対誤差の和

$$\begin{cases} z = \frac{x \cdot y}{x} \\ z = \frac{x}{y} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta c}{|c|} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|}$$

積商の誤差は相対誤差の和

数の表現

。仮想的8ビット実数

符号	指数部			仮数部			
b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7

$$(2b_0 - 1) \left(\frac{b_4}{2} + \frac{b_5}{4} + \frac{b_6}{8} + \frac{b_7}{16} \right) \times 10^{(b_1 \times 4 + b_2 \times 2 + b_3 - 4)}$$

$$-0.9375 \times 10^3 \sim -0.0625 \times 10^{-4}$$

$$0.0$$

$$0.0625 \times 10^{-4} \sim 0.9375 \times 10^3$$

数の表現と表現誤差

符号	指数部		仮数部		10進数表記			
0	1	0	1	1	0	0	⇒ 5	
0	1	0	1	1	0	0	1	⇒ 5.625
0	1	0	1	1	0	1	0	⇒ 6.25
0	1	0	1	1	0	1	1	⇒ 6.875
0	1	0	1	1	0	?	?	← 6

表現誤差

級数と打ち切り誤差

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \dots$$

。有限の項で打ち切るにより近似する

$$e^x \sim 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

$$\text{打ち切り誤差} = \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \dots$$

桁落ちによる誤差

有効数字5桁とする。 $x = 3.1834 \times 10^{-3}$ のとき、

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1.5879 \times 10^{-3}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1.0032}} = 1 - \frac{1}{1.0016} = 1 - 0.99840 = 0.00160$$

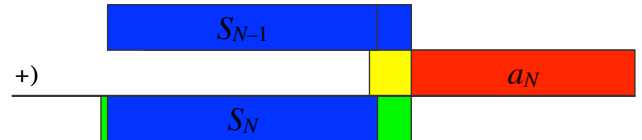
$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1.0016 - 1}{1.0016} = \frac{0.0016}{1.0016} = 0.0015974$$

$$\frac{x}{1+x+\sqrt{1+x}} = \frac{0.0031834}{1.0032 + 1.0016} = \frac{0.0031834}{2.0048} = 0.0015879$$

同程度の大きさの値の差，大きさが大きく異なる値の和・差

情報落ちによる誤差

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + a_N$$



誤差

- 表現誤差（丸め誤差）
 - 高い精度の表現を使う(32bit実数 ⇔ 64bit実数)
- 打ち切り誤差
 - 打ち切る場所を変える．解析的に精度を見積もる．
- 桁落ち
 - 同じ程度の値の差，大きく値の異なる値の和・差が必要ない計算式を工夫する
- 情報落ち
 - アルゴリズムを工夫する