微分方程式の解

ポテンシャルエネルギーが一定値をとる領域でのシュレディンガー方程式は

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + Af(x) = 0$$

のような形であらわされるが、この形の微分方程式は古典力学における調和振動子の運動方程式や、電磁波を記述するマクスウェル方程式、最も簡単な交流回路など様々な問題に対して共通にあらわれる基本的な微分方程式である。aを虚数まで含めて許すとすると$A = -a^2$とおいても、一般性を失わないので

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - a^2 f(x) = 0$$

について考える。微分演算子と定数とは可換（交換可能）であることを思い出すと方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - a^2 f(x) &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - a^2\right) f(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx} - a\right)\left(\frac{d}{dx} + a\right) f(x) = 0\end{aligned}$$

のように書くことができる。

$$\left(\frac{d}{dx} + a\right) f(x) = g(x)$$

とおくと、もとの二階の微分方程式は

$$\begin{cases}\left(\dfrac{d}{dx} + a\right) f(x) = g(x) \\ \left(\dfrac{d}{dx} - a\right) g(x) = 0\end{cases}$$

の二つの連立一階微分方程式になる。

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right) g(x) = 0$$

は最も単純な微分方程式で

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right) g(x) = 0$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = ag(x)$$

$$\frac{1}{g(x)}\frac{dg(x)}{dx} = a$$

と変形し、両辺を不定積分すると

$$\int \frac{1}{g(x)}\frac{dg(x)}{dx} dx = \int a dx$$

この左辺は

$$\int \frac{1}{g(x)}\frac{dg(x)}{dx} dx = \int \frac{1}{g(x)} dg(x) = \ln\left|g(x)\right| + C_1$$

となり、右辺は

$$\int a dx = ax + C_2$$

となる。ただし、C_1, C_2は任意の定数（積分定数）である。したがって、この二つが等しいことより

$$\ln\left|g(x)\right| + C_1 = ax + C_2$$

$$\left|g(x)\right| = \mathrm{e}^{ax + C_2 - C_1}$$

$$g(x) = \pm \mathrm{e}^{C_2 - C_1}\, \mathrm{e}^{ax}$$

$\pm \mathrm{e}^{C_2 - C_1}$を新たに定数$C_3$とおくことにより、

$$g(x) = C_3 \mathrm{e}^{ax}$$

と$g(x)$を求めることができる。
次に

$$\left(\frac{d}{dx} + a\right) f(x) = g(x)$$

を考えよう。ここで$g(x) = 0$であれば前述の$f(x)$と同様に計算できて$C\mathrm{e}^{-ax}$の形の解にな

るはずである。任意の実数a, xについて$\mathrm{e}^{-ax} \neq 0$であることを使うと

$$u(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{e}^{-ax}}$$

と定義することによって

$$f(x) = \mathrm{e}^{-ax}u(x)$$

とおくことができる。これをもとの微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}+a\right)f(x) &= \left(\frac{d}{dx}+a\right)\mathrm{e}^{-ax}u(x)\\ &= \frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{-ax}u(x)\right)+a\mathrm{e}^{-ax}u(x)\\ &= -a\mathrm{e}^{-ax}u(x)+\mathrm{e}^{-ax}\frac{du(x)}{dx}+a\mathrm{e}^{-ax}u(x)\\ &= \mathrm{e}^{-ax}\frac{du(x)}{dx} = g(x)\end{aligned}$$

従って、$g(x) = C_3\mathrm{e}^{ax}$を代入すると

$$\begin{aligned}u(x) &= \int\frac{du(x)}{dx}dx\\ &= \int g(x)\mathrm{e}^{ax}dx\\ &= \int C_3\mathrm{e}^{2ax}dx\\ &= \begin{cases}\dfrac{C_3}{2a}\mathrm{e}^{2ax}+D & (a\neq 0)\\ C_3x+D & (a=0)\end{cases}\end{aligned}$$

ただし、Dは積分定数。

これを$f(x) = \mathrm{e}^{-ax}u(x)$に代入する。

$a = 0$の場合、新たに$C = C_3$とおくと

$$f(x) = Cx + D$$

$a \neq 0$の場合、$D = C_3/2a$とおくと

$$\begin{aligned}f(x) &= \mathrm{e}^{-ax}\left(C\mathrm{e}^{2ax}+D\right)\\ &= C\mathrm{e}^{ax}+D\mathrm{e}^{-ax}\end{aligned}$$

となる。

以上のことはaが一般の複素数の場合にも成り立つので$a = ib$とおくことにより、$b \neq 0$のとき

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}+b^2f(x) = 0$$

の解は

$$f(x) = C\mathrm{e}^{ibx}+D\mathrm{e}^{-ibx}$$

となることがわかる。

すなわち

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}+Af(x) = 0$$

の形の微分方程式の解は

$A > 0$のとき

$$f(x) = C\mathrm{e}^{i\sqrt{A}x}+D\mathrm{e}^{-i\sqrt{A}x}$$

$A < 0$のとき

$$f(x) = C\mathrm{e}^{\sqrt{|A|}x}+D\mathrm{e}^{-\sqrt{|A|}x}$$

となる。

この結果は今後、特に証明等を行わずによく用いる。