エルミートの多項式の性質

(1) 母関数

エルミートの微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}H_n(x)-2x\frac{d}{dx}H_n(x)+2nH_n(x)=0$$

の解 $H_n(x)$ はその母関数 $S(x,s)=\mathrm{e}^{-s^2+2sx}$ をもちいて

$$S(x,s)=\mathrm{e}^{x^2-(s-x)^2}=\mathrm{e}^{-s^2+2sx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}s^n$$

によって定義される。

(2) 漸化式

$\mathrm{e}^{-s^2+2sx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}s^n$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\mathrm{e}^{-s^2+2sx}=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}s^n$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{e}^{-s^2+2sx}=2s\mathrm{e}^{-s^2+2sx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2H_n(x)}{n!}s^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!}s^n$$

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}s^n=\frac{d}{dx}H_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{d}{dx}H_n(x)}{n(n-1)!}s^n$$

$$\frac{d}{dx}H_0(x)=0$$

$$\frac{d}{dx}H_n(x)=2nH_{n-1}(x)$$

同様に、$\mathrm{e}^{-s^2+2sx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}s^n$ の両辺を s で微分すると

$$\frac{d}{ds}\mathrm{e}^{-s^2+2sx}=\frac{d}{ds}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}s^n$$

$$\frac{d}{ds}\mathrm{e}^{-s^2+2sx}=\left(-2s+2x\right)\mathrm{e}^{-s^2+2sx}=\left(-2s+2x\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n\left(x\right)}{n!}s^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2H_n\left(x\right)}{n!}s^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2xH_n\left(x\right)}{n!}s^n$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2H_{n-1}\left(x\right)}{\left(n-1\right)!}s^n+2xH_0\left(x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2xH_n\left(x\right)}{n!}s^n$$

$$=2xH_0\left(x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2xH_n\left(x\right)-2nH_{n-1}\left(x\right)}{n!}s^n$$

$$\frac{d}{ds}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n\left(x\right)}{n!}s^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n\left(x\right)}{\left(n-1\right)!}s^{n-1}=H_1\left(x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+1}\left(x\right)}{n!}s^n$$

$$H_1\left(x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+1}\left(x\right)}{n!}s^n=2xH_0\left(x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2xH_n\left(x\right)-2nH_{n-1}\left(x\right)}{n!}s^n$$

$$H_1\left(x\right)=2xH_0\left(x\right)$$

$$H_{n+1}\left(x\right)=2xH_n\left(x\right)-2nH_{n-1}\left(x\right)$$

以上、まとめると次のような関係と漸化式を得る。

$$\frac{d}{dx}H_0\left(x\right)=0$$

$$H_1\left(x\right)=2xH_0\left(x\right)$$

$$\frac{d}{dx}H_n\left(x\right)=2nH_{n-1}\left(x\right)$$

$$H_{n+1}\left(x\right)=2xH_n\left(x\right)-2nH_{n-1}\left(x\right)$$

(2) エルミートの微分方程式

漸化式をそれぞれxで微分すると

$$\frac{d^2}{dx^2}H_n\left(x\right)=2n\frac{d}{dx}H_{n-1}\left(x\right)$$

$$\frac{d}{dx}H_{n+1}\left(x\right)=2\frac{d}{dx}\left(xH_n\left(x\right)\right)-2n\frac{d}{dx}H_{n-1}\left(x\right)$$

$$2\left(n+1\right)H_n\left(x\right)=2H_n\left(x\right)+2x\frac{d}{dx}H_n\left(x\right)-\frac{d^2}{dx^2}H_{n-1}\left(x\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}H_{n-1}\left(x\right)-2x\frac{d}{dx}H_n\left(x\right)+2nH_n\left(x\right)=0$$

となり確かにエルミートの多項式がエルミートの微分方程式の解であることがわかる。

(3) 多項式の一般形

$\mathrm{e}^{-s^2+2sx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}s^n$ の両辺を s で n 回微分すると、

$$\frac{\partial^m}{\partial s^m}\left(\mathrm{e}^{x^2-(s-x)^2}\right)=\mathrm{e}^{x^2}\frac{\partial^m}{\partial s^m}\mathrm{e}^{-(s-x)^2}=\frac{\partial^m}{\partial s^m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}s^n=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{H_n(x)}{(n-m)!}s^{n-m}$$

$\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{e}^{-(s-x)^2}=-\frac{\partial}{\partial \xi}\mathrm{e}^{-(s-x)^2}$ であるから $\frac{\partial^m}{\partial s^m}\mathrm{e}^{-(s-x)^2}=(-1)^m\frac{\partial^m}{\partial \xi^m}\mathrm{e}^{-(s-x)^2}$ 、これより

$$(-1)^m\mathrm{e}^{x^2}\frac{\partial^m}{\partial \xi^m}\mathrm{e}^{-(s-x)^2}=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{H_n(x)}{(n-m)!}s^{n-m}$$

$s=0$ を代入すると、エルミート多項式の一般式は

$$H_m(x)=(-1)^m\mathrm{e}^{x^2}\frac{\partial^m}{\partial \xi^m}\mathrm{e}^{-x^2}$$

のように与えられる。

(4) 直交条件

母関数 $S(x,s)=\mathrm{e}^{-s^2+2sx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}s^n$ について s のかわりに t で書き直すと、

$$S(x,t)=\mathrm{e}^{-s^2+2tx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n$$

ここで、積分 $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}S(x,s)S(x,t)dx$ について考えよう。まず第二項を用いると、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}S(x,s)S(x,t)dx&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-s^2+2sx}\mathrm{e}^{-t^2+2tx}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2+2sx+2tx-s^2-t^2}dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(x-(s+t))^2x^2+(s+t)^2-s^2-t^2}dx=\mathrm{e}^{2st}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(x-(s+t))^2x^2}dx\\&=\mathrm{e}^{2st}\sqrt{\pi}=\sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2st)^m}{m!}\end{aligned}$$

第三項を用いると

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}S(x,s)S(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}s^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_m(x)}{m!}t^m dx=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\frac{t^m}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx$$

まとめると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} S(x,s)S(x,t)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\frac{t^m}{m!}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x)H_m(x)dx = \sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2st)^m}{m!}$$

となり、第二項と第三項の s, t の同じ次数の項を比較すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x)H_m(x)dx = 0 \quad (n \neq m)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x)H_n(x)dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$$